Mathematik
„Die Zahl Pi und ihre Folgen“

Die Kreiszahl π (pi) ist eine mathematische Konstante; ihr numerischer Wert beträgt π = 3,14159...

Sie beschreibt in der Geometrie das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser. Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Größe des Kreises. Die Kreiszahl wird mit dem kleinen griechischen Buchstaben pi (π) bezeichnet, dem Anfangsbuchstaben des griechischen Wortes π periphereia (Randbereich) bzw. πμ perimetros (Umfang). Die Bezeichnung pi (π) erschien erstmals 1706 in dem Buch Synopsis palmariorum matheseos (zu Deutsch etwa: Eine neue Einführung in die Mathematik) des aus Wales stammenden Gelehrten William Jones (1675–1749). Die Kreiszahl π wird auch Archimedes-Konstante oder ludolphsche Zahl (nach Ludolph van Ceulen) genannt.

Die Zahl π entsteht aus der Vorstellung, dass es sog. IDEALE QUADRATE gibt. In aller Kürze gesagt, kann man Ideale Quadrate nur mit Werkzeugen des höheren Verstandes erzeugen, z. B. mit einem imaginären Zirkel mit dem Radius unendlich, natürlich in die 4 Achsenrichtungen. Hier in der gedachten Unendlichkeit, entsteht somit eine fiktive Schnittstelle zu einem Kreis mit unendlichem Radius, den ich diesem Idealquadrat einschreibe. Diese Schnittstelle ist nicht nur ein Punkt, sondern vereinfacht gesprochen eine Linie, die keinen Anfang und kein Ende hat. Das hat seinen Grund darin, dass man sich ja in der Unendlichkeit bewegen muss, um diese Schnittstelle zu erzeugen. Da fragt man sich natürlich gleich, kann man sich denn überhaupt an einem unendlich weit entfernten Punkt bewegen ohne wieder in die Endlichkeit zu „fallen“. Unendlichkeit schließt ja aus, dass etwas noch weiter entfernt ist vom Ursprung. Wir bedienen uns hier eines gedanklichen Tricks und kürzen die Unendlichkeiten, erhalten somit die Relationen. So leite ich aus der Schnittstelle, die eine Schnittgerade bzw. Teilidentität des Kreises und des Idealquadrats ist, die konstante Relation π ab.

Zum besseren Verständnis müsste man statt der herkömmlichen Definition von PI (Kreisumfang: Kreisdurchmesser, aber auch Kreisfläche:Quadratradius) sagen, dass PI allgemeiner gesprochen eine KONSTRUIERTE VERHÄLTNISKONSTANTE ist. Eine Eigenschaft, die auch Kurven und anliegenden Tangenten, sprich Geraden gemeinsam ist.)

Mathematiker sind heute in der Lage, die Kreiszahl Pi bis auf zweihundert Milliarden Stellen hinter dem Komma genau zu bestimmen.

Die ersten 100 Nachkommastellen

Da π eine irrationale Zahl ist, lässt sich ihre Darstellung in keinem Stellenwertsystem vollständig angeben: Die Darstellung ist stets unendlich lang und nicht periodisch. Die ersten 100 dezimalen Nachkommastellen lauten

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 …

Formeln, die π enthalten

Formeln der Geometrie

In der Geometrie treten die Eigenschaften von π als Kreiszahl unmittelbar hervor.

Umfang eines Kreises mit Radius r: $U = 2\pi r$

Fläche eines Kreises mit Radius r: $A = \pi r2$

Volumen einer Kugel mit Radius r:

Oberfläche einer Kugel mit Radius r: $AO = 4\pi r2$

Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe a: $V = r2\pi a$

Volumen eines durch die Rotation des Graphen $y = f(x)$ um die x-Achse definierten Drehkörpers mit den Grenzen a und b:

Minkowski-Schranke der Geometrie der Zahlen:

Formeln der Analysis

Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

π spielt daneben in vielen mathematischen Zusammenhängen eine Rolle, zum Beispiel bei unendlichen Reihen: (Euler, s. auch riemannsche -Funktion)

der gaußschen Glockenkurve:

der Stirling-Formel als Näherung der Fakultät für große n:

der Fourier-Transformation:

der eulerschen Identität: $ei\pi + 1 = 0$

Die eulersche Identität als Kombination der Kreiszahl π, der ebenfalls transzendenten eulerschen Zahl e, der imaginären Einheit i und der beiden grundlegenden Zahlen 0 und 1 wird als eine der „schönsten mathematischen Formeln“ angesehen.

Formeln der Zahlentheorie

Die relative Häufigkeit, dass zwei zufällig gewählte natürliche Zahlen, die kleiner einer Schranke M sind, teilerfremd sind, strebt mit gegen

Formeln der Physik

In der Physik spielt π neben

der Kreisbewegung: = 2πf (Winkelgeschwindigkeit gleich 2π mal Umlauffrequenz)

vor allem bei Wellen eine Rolle, da dort π über die Sinus- und Kosinusfunktion eingeht. Somit also zum Beispiel

in der Quantenmechanik: (heisenbergsche Unschärferelation).

in der Berechnung der Knicklast:

Anwendungen, Nutzen heutiger Berechnungen

Die Näherungswerte und -verfahren zur Kreiszahl waren lange Zeit insbesondere für die angewandten Wissenschaften wie etwa im Ingenieurbau sehr wertvoll; die neueren Näherungswerte hingegen haben bereits so viele Stellen, dass ein praktischer Nutzen kaum noch gegeben ist.

Es genügen beispielsweise zur Berechnung des Kreisumfangs auf einen Millimeter Genauigkeit

bei einem Radius von 30 Metern: vier Dezimalstellen von π,

beim Erdradius: zehn Dezimalstellen,

bei einem Radius mit dem Abstand Erde-Sonne: 15 Dezimalstellen.

Wie viele Stellen sind wohl erforderlich, um den größten in unserem Universum vorstellbaren realen Kreis mit der größten vorstellbaren Genauigkeit zu berechnen? Das Licht des Urknalls in Form der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung erreicht uns aus einer Entfernung, die sich als das Produkt des Weltalters (etwa 13*109 Jahre) mit der Lichtgeschwindigkeit (etwa 300.000 km/s oder 9,46*1015 m/a) ergibt, also rund 1,3*1026 m. Der Kreis mit diesem Radius hat also einen Umfang von etwa 8,17*1026 m. Die kleinste physikalisch sinnvolle Längeneinheit ist die Planck-Länge von etwa 10-35 m. Der Kreis besteht also aus 8,17*1061 Planck-Längen.

Um ihn aus dem gegebenen Radius (vorausgesetzt, dieser wäre auf eine Planck-Länge genau bekannt) mit der Genauigkeit von einer Planck-Länge zu berechnen, würden also schon 62 Dezimalstellen von π ausreichen.

Der derzeitige Näherungsrekord liegt bei 1,241 Billionen Stellen.

Einziger heute erkennbarer praktischer Nutzen dieser aufwändigen Rechnungen liegt in der Möglichkeit, die Computer-Hardware und -Software zu testen, da bereits kleine Rechenfehler zu vielen falschen Stellen von π führen.

Der mathematischen Theorie verhelfen die Berechnungen auf dem Gebiet der Zufallsstatistik zu neuen Erkenntnissen, wie im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

Die Zahl π spielt in verschiedenen Zweigen der Mathematik eine wichtige Rolle – nicht nur innerhalb der Geometrie, sondern auch in der Algebra, Analysis, Trigonometrische Funktion und Zahlentheorie.

Offene Fragen

Die zurzeit drängendste mathematische Frage bezüglich π ist, ob sie eine normale Zahl ist, d. h. ob sie zum Beispiel in einer binären (oder jeder anderen n-ären) Zahlendarstellung jede mögliche Binär- bzw. sonstige Ziffergruppe gleichermaßen enthält – so wie dies die Statistik erwarten ließe, wenn man eine Zahl vollkommen nach dem Zufall erzeugen würde.

In letzter Konsequenz würde dies beispielsweise bedeuten, dass die Kreiszahl alle bisher und zukünftig geschriebenen Bücher irgendwo in codierter Binär-Form enthalten muss. Siehe auch das Infinite monkey theorem.

Bailey und Crandal zeigten im Jahr 2000, dass die Existenz der oben angegebenen Bailey-Borwein-Plouffe-Formel und ähnlicher Ableitungen belegt, dass die Normalität von π zur Basis 2 (wie auch die von verschiedenen anderen Konstanten) auf eine bestehende Vermutung der Chaostheorie reduziert werden kann. Für weitere Details dazu siehe die Webseite von Bailey. [1]

Physiker der Purdue Universität haben im Jahre 2005 die ersten 100 Millionen Dezimalstellen von π auf ihre Zufälligkeit hin untersucht und mit kommerziellen Zufallszahlengeneratoren verglichen. Der Forscher Ephraim Fischbach und sein Mitarbeiter Shu-Ju Tu konnten dabei keinerlei verborgene Muster in der Zahl π entdecken. Demnach sei nach Ansicht Fischbachs die Zahl π tatsächlich eine gute Quelle für Zufälligkeit. Allerdings schnitten einige Zufallszahlengeneratoren noch besser als π ab.

Sonstiges

Rekorde und Kuriositäten

Der derzeitige Rekord der Berechnung von π wird von Yasumasa Kanada auf einem HITACHI-Supercomputer mit 1.241.100.000.000 (gut 1,2 Billionen) Stellen gehalten. An der 1.142.905.318.634. Nachkommastelle von π findet man laut Yasumasa Kanada wieder die Folge 314159265358.

Freunde der Zahl π gedenken zum einen am 14. März der Kreiszahl mit dem Pi-Tag wegen der amerikanischen Datumsnotation 3/14. Zum anderen wird ein π-Näherungstag am 22. Juli gefeiert, mit dem die Näherung 22/7 von Archimedes geehrt werden soll.

Aus Sternstunden der modernen Mathematik von Keith Devlin: Ein weiteres Beispiel, in dem π überraschend eine Rolle spielt, ist das folgende: Wenn man ein Streichholz auf ein Brett wirft, das durch parallele, jeweils eine Streichholzlänge voneinander entfernte Linien unterteilt ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das Streichholz so fällt, dass es eine Linie schneidet, genau 2 / π. Dabei handelt es sich um eine Variante des weiter oben beschriebenen Nadelwurfversuchs.

Im Jahre 1897 sollte im US-Bundesstaat Indiana mit dem Indiana-Pi-Bill-Gesetzentwurf die Zahl π per Gesetz als 3,2 definiert werden. Der Hobbymathematiker Edwin J. Goodwin war sicher, die Quadratur des Kreises gefunden zu haben. Er schlug der Regierung den Handel vor, auf alle Tantiemen aus der Anwendung seiner Entdeckung in der mathematischen Aus- und Weiterbildung zu verzichten, wenn seine Entdeckung zum Gesetz erhoben würde. Erst nach der Aufklärung durch einen „gestandenen“ Mathematiker, der von dem Gesetzesvorhaben zufällig in der Zeitung las, vertagte die zweite Kammer des Parlaments den vom Repräsentantenhaus bereits beschlossenen Entwurf auf unbestimmte Zeit. Das Guinness-Buch der Rekorde kennt diese Geschichte etwas anders: Der ungenaueste Wert von π. Im Jahre 1897 verabschiedete die Generalversammlung von Indiana ein Gesetz (Bill Nr. 246), nach dem der Wert von π de jure vier ist.

1853 publizierte William Shanks seine Berechnung der ersten 707 Dezimalstellen von π, alle per Hand berechnet. 92 Jahre später, im Jahre 1945, wurde entdeckt, dass die letzten 180 Stellen falsch waren. (Siehe auch die Tabelle unten, die etwas andere Jahreszahlen angibt.)

Die Versionsnummer des Textsatzprogramms TeX von Donald Knuth wird entgegen den üblichen Konventionen der Software-Entwicklung seit den 1990ern so inkrementiert, dass sie sich langsam π annähert. Die aktuelle Version aus dem Jahr 2002 trägt die Nummer 3.141592

Wissenschaftler senden mit Radioteleskopen die Kreiszahl ins Weltall. Sie sind der Meinung, dass andere Zivilisationen diese Zahl kennen müssen, wenn sie das Signal auffangen können.

Der aktuelle Rekord im Pi-Vorlesen liegt bei 108.000 Nachkommastellen in 30 Stunden. Der Weltrekordversuch begann am 3. Juni 2005 um 18:00 Uhr und wurde am 5. Juni 2005 pünktlich um 0:00 Uhr erfolgreich beendet. Über 360 freiwillige Leser lasen jeweils 300 Nachkommastellen. Organisiert wurde der Weltrekord vom Mathematikum in Gießen.

Wenn eine kreisförmige Schnur – zum Beispiel entlang des Erdäquators oder um einen Ball oder eine Erbse herum – um einen Meter verlängert wird, ergibt sich völlig unabhängig von der Länge der Schnur immer eine Vergrößerung des Radius um 1 / 2π Meter (ungefähr 16 Zentimeter), wenn die Schnur anschließend wieder kreisförmig gemacht wird.

universitätbonn
„Hineingewoben in die Welt der Zahlen“
hausdorff CENTER FOR MATHEMATICS
BONN Die Stadt
Installation: Stefan W. Knor - www.lumen-tenebris.de
Layout: cub-com - Martin Backhaus - www.cub-com.de